18. Hausübung zu den Rechenmethoden der Physik SS 2000

Abgabe am 25. 4. 2000 vor der Vorlesung

52. Logistische Differentialgleichung

Die zeitliche Entwicklung einer Population $P(t)$ (Weltbevölkerung, Bakterienkultur oder österlicher Hasenbestand), sei durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $\dot{P}(t) = \alpha\, P(t)\,(\beta - P(t))$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Der Faktor $(\beta - P(t))$ auf der rechten Seite trägt der in der Realität beschränkten Aufnahmekapazität Rechnung und wirkt bei großen Populationen wachstumshemmend.

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung auf zweierlei Weisen: Durch Trennung der Veränderlichen und vermittels der Substitution $P(t) = 1/y(t)$.

(b) Welchen Grenzwert erreicht $P(t)$ für $t \to \infty$? Wie folgt dieser Grenzwert bereits aus der Differentialgleichung?

(c) Wie verändert sich die Wachstumsrate, falls mit einer kleinen Population begonnen wird? Bei welcher charakteristischen Population P_0 verlangsamt sich das Wachstum? Skizzieren Sie mit diesen Erkenntnissen den Verlauf $P(t)$. (5)

53. Eulersche Differentialgleichung

Welche Methode aus der Vorlesung greift im Falle der folgenden Differentialgleichung? Lösen Sie diese auf dem Intervall $]0, \infty[$.

$$xy''' + 2y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \qquad (3)$$

54. Deltafunktion

Bestimmen Sie die Konstanten in den folgenden Identitäten für die δ-Funktion.

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon(x) &= \alpha\,\frac{1-\cos\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{x^2}\\
\delta_\epsilon(\vec{r}) &= \beta\,\delta(r-\epsilon)\\
\delta_\epsilon(\vec{r}) &= \gamma\, r\, e^{-\frac{r^2}{\epsilon^2}}\\
\delta_\epsilon(\vec{r}) &= \lambda\,\delta(z)\,\delta(\rho-\epsilon) \quad \text{mit der Zylinderkoordinate } \rho
\end{aligned}$$

Wenn ein dünnes Blech mit konstanter Masse pro Fläche σ die rechte xz-Halbebene ausfüllt, dann ist ersichtlich $\rho(\vec{r}) = \sigma\,\delta(y)\,\theta(x)$ seine räumliche Massendichte in kartesischen Koordinaten. In Kugelkoordinaten gilt $\rho(\vec{r}) = f(r,\theta)\,\delta(\varphi)$. Wie bestimmt sich $f(r,\theta)$? (4)